

فصلنامه علمی آمااد و فناوری دفاعی، سال پنجم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۴۰۱

## شبیه‌سازی عددی یک مدل جامع از مرتبه کسری بیماری‌های واگیردار جهت تعیین راهبرد کنترلی بهینه

پیام مختاری<sup>۱</sup>، امین فقیه<sup>۲</sup>، اسماعیل افراشته<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۳۰

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۰۸

### چکیده:

در این مقاله، ما یک فرمول کلی برای یک مسئله کنترل بهینه کسری ارائه می‌کنیم که در آن معادلات برحسب مشتقات کسری کاپوتو آورده شده‌اند. یک روش طیفی گالرکین کسری را برای شبیه‌سازی عددی مسئله فوق به کار می‌بریم. علی‌رغم غیرخطی بودن مسئله، نقطه قوت روش فوق به دست آمدن جواب‌ها با دقت بسیار بالا و بدون نیاز به حل هیچ‌گونه دستگاه جبری هست. دو مدل کسری برای پویایی انتقال ویروس هپاتیت ب و کرونا را با هدف کنترل شیوع استفاده می‌کنیم. با استفاده از روش فوق دو مسئله تجزیه و تحلیل شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهد که با اجرای این روش قدرتمند و اثر مشتق کسری می‌تواند نقش اساسی در عدم گسترش بیماری داشته باشد.

**کلمات کلیدی:** دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری، روش طیفی گالرکین، بیماری‌های واگیردار، پیش‌گیری.

<sup>۱</sup> دانشیار گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، تبریز، ایران [mokhtary@sut.ac.ir](mailto:mokhtary@sut.ac.ir)

<sup>۲</sup> محقق پسادکتری دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی [amin.fagheh71@gmail.com](mailto:amin.fagheh71@gmail.com)

<sup>۳</sup> پژوهشگر گروه ریاضی و شبیه‌سازی، پژوهشکده آمااد، فناوری‌های دفاعی و پدافند غیرعامل، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران [e.afraشته@sut.ac.ir](mailto:e.afraشته@sut.ac.ir)

## مقدمه:

بیماری‌های واگیر، بیماری‌هایی هستند که توسط یک عامل بیولوژیک (اعم از باکتری، ویروس، قارچ، انگل، پارازیت یا پر یون) به صورت مستقیم یا غیرمستقیم به انسان منتقل می‌شوند. بیماری‌های واگیردار می‌توانند بر اساس شیوه‌های انتقالشان طبقه‌بندی شوند. این بیماری‌ها از طریق هوا (کرونا، سل، سرخک، سیاه‌سرفه و ...)، برقراری رابطه جنسی (ایدز، هپاتیت ب و ...)، مدفوع یا مصرف آب و غذای آلوده (هپاتیت ب، وبا و ...) [۱۸]، حشرات بیماری‌زا (مالاریا، مننژیت، کزاز و ...) منتقل می‌شوند. علی‌رغم پیشرفت‌های شگرفت علم پزشکی در زمینه‌های پیشگیری و درمان بیماری‌های واگیردار، متأسفانه هنوز هم بیماری‌های عفونی باقابلیت ایجاد اپیدمی به‌عنوان یک مشکل در سراسر جهان مطرح هستند. بروز مقاومت دارویی در عوامل بیماری‌زا و یا ناقلین آن‌ها، بازگشت مجدد برخی بیماری‌ها به مناطقی که سال‌ها عاری از آن بیماری بوده‌اند (بیماری‌های باز پدید) و ظهور بیماری‌های جدید (بیماری‌های نوپدید) همه از دلایل لزوم پیشگیری و کنترل با استفاده از استراتژی‌های مفید و مداخله مناسب جهت مهار کردن این بیماری‌های همه‌گیر می‌باشند. از طرفی کنترل این بیماری‌ها همواره یک مسئله مهم در مبحث سیستم‌های کنترلی و مهندسی پزشکی و ریاضی بوده است. لذا نه تنها پزشکان بحث کشف داروی بهتر را دنبال می‌کنند [۱۹] بلکه محققین ریاضی و مهندسی نیز می‌توانند با ارائه کنترل‌کننده‌ها و مدل‌سازی‌های ریاضی مناسب در جهت پیشگیری و اثربخشی بیشتر درمان گام بردارند.

برای انتشار ویروس، مدل‌های مختلفی به وجود آمده است. اکثر مطالعات و شبیه‌سازی‌های انجام‌شده برای کنترل بیماری‌های واگیردار به‌صورت سیستم‌های مرتبه صحیح بوده است. با توجه به اینکه مفاهیم مشتق و انتگرال نقش بسیار ارزنده‌ای در پیشرفت علوم و فنون سیستم‌های طبیعی و مصنوعی داشته‌اند و همچنین حساب کسری این مفاهیم را بسط داده است، بسیاری از پدیده‌های طبیعی مرتبه کسری هستند و می‌توان آن‌ها را به شکل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بیان کرد چراکه مشتقات کسری ابزار مناسب‌تری جهت مدل‌سازی پدیده‌هایی که دارای خواص موروثی و حافظه‌ای می‌باشند است. سیستم‌های مرتبه کسری در جات آزادی بیشتری نسبت به سیستم‌های مرتبه صحیح دارند [۷]. از این رو یک مدل مرتبه کسری جامع از این بیماری‌ها جهت مطالعه و

تحقیق مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به غیرخطی بودن سیستم فوق و توانمندی روش‌های عددی طیفی در حل عددی معادلات دیفرانسیل، برای شبیه‌سازی عددی مسئله یک روش طیفی خوش وضع را به‌گونه‌ای پیاده‌سازی می‌کنیم که صرف‌نظر از ناهمواری موجود در معادلات، منجر به تولید دستگاهی با ماتریس ضرایب تنک شود، تا از این طریق عدد حالت دستگاه حاصله کنترل‌شده و یک تقریب طیفی خوش وضع به دست آید. در نتیجه تحقیقات انجام‌شده، بر آنیم که با روش ارائه‌شده فوق، زمان عمر و کیفیت زندگی افراد آلوده به این بیماری‌ها بیشتر شود و نهایتاً به پیشگیری ابتلا به این بیماری‌ها دامن‌زنیم. همچنین به بررسی اثر مشتق کسری برگسترش و در همان افراد مبتلا به ویروس نسبت به مشتق مرتبه صحیح می‌پردازیم. از طرفی با ارائه مثال‌های واقعی کارایی روش مورد نظر را با دقت مورد سنجش قرار می‌دهیم.

### پیشینه:

اخیراً این موضوع توجه محققان ریاضی را به خود جلب کرده و با ارائه مدل‌هایی به بررسی پیشگیری و درمان این بیماری پرداخته‌اند. به‌عنوان مثال در سال ۲۰۲۱ یولی چن (Yuli Chen) و همکاران، به بررسی انواع مدل‌های اپیدمی شامل مستعد پذیرش - آلوده به ویروس - بهبودیافته (SIR)، مستعد پذیرش - در معرض - آلوده به ویروس - بهبودیافته (SEIR)، مستعد پذیرش - در معرض - آلوده به ویروس - بدون علائم - بهبودیافته (SEIAR)، پرداخته‌اند [۶]. در [۱۶]، وجود و یکتایی جواب‌های یکی از مدل‌های کسری اپیدمی با استفاده از قضیه نقطه ثابت صورت گرفته است و از طرفی روش تجزیه آدومیان برای تقریب جواب‌های مدل فوق به‌کاررفته است. در سال ۲۰۲۰، یک تعمیم از مدل اپیدمی کسری مستعد پذیرش - آلوده به ویروس - بهبودیافته (SIR) ارائه‌شده است و سپس با استفاده از مدل فوق به پیش‌بینی میزان گسترش بیماری Covid-19 پرداخته‌اند. از طرفی اثر مشتق کسری بر دینامیک مدل مورد تحقیق واقع شده است. نتایج پیش‌بینی شده از طریق مدل معرفی شده در کشورهای ایتالیا و اسپانیا تئوری ارائه‌شده را قویاً تأیید می‌کنند [۹]. در مقاله [۱۰]، محققان یک مدل اپیدمی جدید با اثر ترس (SIS) را فرمول‌بندی کرده‌اند. وجود، یکتایی نامنفی بودن

جواب‌ها و پایداری سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین نقش پارامتر کنترل بی‌حاری، سطح ترس و مشتق مرتبه کسری در پایداری سیستم آنالیز شده است. در سال ۲۰۲۰ ال‌ساندرا بوراتو (Alessandra Buratto) و همکاران، مقاله‌ای جهت معرفی مدل‌های ریاضی که سیر تکامل ویروس HIV در بدن را مطالعه می‌کنند، به چاپ رساندند. مدل‌های معرفی شده به‌طور فزاینده‌ای به جهت تحقیق در زمینه استراتژی‌های در هانی بهینه برای جلوگیری از تکه‌تیر ویروس در بدن انسان، اهمیت دارند [۳]. یک مدل اپیدمی از مرتبه مشتق کسری برای بی‌حاری ابولا [۱۲] در معرفی شده است که مثبت بودن جواب سیستم و پایداری نقاط تعادل آن بررسی شده است. برای تقریب جواب‌های این سیستم از یک روش عددی استفاده شده است که آنالیز خطای روش فوق انجام گرفته است. از طرفی نشان داده شده است که استفاده از پارامترهای جدید و مشتق مرتبه کسری تطابق بیشتری با داده‌های واقعی به دست می‌دهد. با توجه به اینکه کنترل بیماری ایدز نیاز به بررسی‌های مختلف در گروه‌های سنی متفاوت دارد، در [۱۱]، آنالیز و فرمول‌بندی مدل انتقال ویروس HIV در درون و بین دو گروه سنی در کشور کنیا انجام شده است. در این تحقیق نشان داده شده است که زنان در مقایسه با مردان بیشتر آلوده به ویروس HIV هستند. همچنین تجزیه و تحلیل نشان داده است که بیشترین عفونت HIV در جمعیت بزرگسالان رخ داده است. با توجه به اینکه محدود کردن و کنترل اپیدمی کرونا نیازمند بررسی دقیق انتقال این ویروس است. در مقاله [۲]، یک مدل ریاضی ارائه شده است که در آن خفاش‌ها به‌عنوان منشأ ویروس در نظر گرفته شده‌اند که بی‌حاری را به جمعیت انسانی منتقل می‌کنند. در سال ۲۰۲۱، مقاله‌ای برای مطالعه یک روش کمی برای ارزیابی امکان ظهور گونه‌های ویروس مقاوم در برابر درمان‌های دارویی، به چاپ رسیده است [۵]. همچنین دینامیک عفونت ایدز در [۱۵] مطالعه شده است و نقش داروهای ضد ویروس در هانی که مانع تکه‌تیر ویروس HIV می‌شوند را روی مدل کسری معرفی شده بررسی کرده است. در مقاله [۱۳] از مفهوم مشتق کسری برای بهبود یک مدل ریاضی به جهت گسترش ویروس کرونا جدید در مصر و با هدف پیش‌بینی استفاده شده است. نشان داده شده است که نتایج پیش‌بینی شده با واقعیت ارتباط نزدیکی دارند. همچنین داده‌های گزارش شده تأکید کرده است

که دوره قرنطینه باید به اندازه کافی طولانی باشد تا نتیجه مطلوب حاصل شود. در سال 2018 یک مدل MSEIR شامل مشتق کسری کاپوتو<sup>۱</sup> ارائه شده است. پایداری مدل فوق بررسی شده و در پایان با استفاده از نرم افزار متلب شبیه سازی شیوع بیماری واریسلا در یک مدرسه در چین انجام شده است [۱].

اما از جمله ایراد عمده تحقیقات فوق، موارد زیر هستند:

تعریف کنترلر بیشتر در مدل، به معنی افزایش بعد دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری هست. آیا بدون ارائه تئوری قدرتمند، و بدون ارائه یک روش عددی توانا قادر به حل همچنین دستگاه غیرخطی هستیم؟ مسلماً پاسخ خیر است. دلیل روشن عدم ارائه یک مدل جامع و بدون محدودیت در زمینه تعریف کنترلر همین عدم تئوری قدرتمند و روش شبیه سازی خوش وضع در زمینه این دستگاه های معادلات دیفرانسیل کسری است. زمانی که عزم خود را جزم کرده تا در این زمینه تحقیق کنم، پس از کشف این ضعف در تحقیقات گذشته، تصمیم گرفتم ابتدا به تحلیل و بررسی فرم کلی مدل بیماری های واگیردار بپردازم. این تحلیل و بررسی شامل ارائه مدل جامع به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی و نهایتاً ارائه یک روش بسیار سریع با توجه به تحلیل مورد نظر است. تا زمانی که ابزار قدرتمند نداشته باشیم، نتایج مطلوب هم نخواهیم داشت. در این مقاله به ارائه روش سریع خود و همچنین نهایتاً نتایج مفید و قابل استناد در زمینه پیشگیری از بیماری های واگیردار خواهیم پرداخت.

<sup>1</sup> Caputo

### اهداف تحقیق:

در این مقاله، با توجه عدم توانایی مشتقات مرتبه صحیح در مدل‌سازی پدیده‌هایی که دارای خواص موروثی و حافظه‌ای می‌باشند، یک مدل مرتبه کسری جامع از دینامیک انتقال بیماری‌های واگیردار ارائه می‌شود.

با توجه به عدم ارائه روشی قابل استناد و قوی در تحقیقات گذشته، به دنبال آن هستیم که با استفاده از یک روش طیفی مرتبه بالا در جهت شبیه‌سازی عددی مسئله ارائه‌شده گام برمی‌داریم و نهایتاً به دنبال عدم انتشار ویروس و کاهش تعداد ویروس‌های آزاد و افزایش تعداد سلول‌های سالم و نهایتاً افزایش طول عمر و کیفیت زندگی افراد مبتلا به ویروس هستیم.

### سؤال‌های اصلی و فرعی:

- ۱- برای مدل‌سازی بیماری‌های واگیردار از کدام رویکردهای ریاضی می‌توان استفاده کرد؟
- ۲- با توجه به عدم وجود یک روش مرتبه بالا و خوش وضع برای حل سیستم‌های غیرخطی کسری، آیا می‌توان یک روش عددی با دقت بالا به منظور شبیه‌سازی عددی مسئله معرفی شده پایه‌ریزی کرد؟
- ۳- چگونه می‌توان راهبرد و استراتژی بهینه را برای پیشگیری و کنترل بیماری‌های واگیردار انتخاب کرد؟
- ۴- مدل‌ها و روش‌های ارائه‌شده آیا برتری نسبت به مدل‌ها و روش‌های موجود در پیشینه تحقیق دارند؟

### روش‌شناسی:

ابتدا به ارائه مدل جامع خود از بیماری‌های واگیردار در غالب دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری چندمرتبه‌ای غیرخطی

$$\begin{cases} D_C^{\gamma_j} z_j(t) = g_j(t, \mathbf{z}(t)), & j \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}, \\ z_j^{(k)}(0) = z_{j,0}^{(k)}, k = 0, 1, \dots, \lceil \gamma_j \rceil - 1, t \in \Lambda, \end{cases} \quad (1)$$

می‌پردازیم. در دستگاه فوق  $\gamma_j = \frac{\eta_j}{\lambda_j}$  یک عدد کسری مثبت است به طوری که  $\eta_j \geq 1$  و  $\lambda_j \geq 2$  نسبت به هم اول هستند.

با بررسی قضیه‌های شناخته شده [۷] می‌توان دریافت که مشتق  $\lceil \gamma_j \rceil$  جواب  $y_j$  همواره دارای ناپیوستگی در مبدأ هست. بنابراین با آشنایی از رفتار تکنیکی جواب، می‌توان با اتخاذ پایه‌های مناسب، روش‌های عددی با مرتبه بالا تولید کرد. با توجه به این که مشتق کسری کاپوتو یک عملگر انتگرالی با هسته ضعیف است، نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری هموار باشند، حتی اگر توابع ورودی هموار باشند. این امر یک چالش جدی در ساخت روش‌های تقریبی مناسب طیفی با مرتبه همگرایی بالا ایجاد می‌کند. بنابراین برای پیاده‌سازی این روش‌ها شناخت درجه همواری و رفتار جواب مسئله ضروری است.

### روش گالرکین ژاکوبی کسری:

در این بخش روش گالرکین ژاکوبی کسری<sup>۱</sup> را برای تقریب جواب‌های (۱) پیاده‌سازی خواهیم کرد. در این رویکرد عددی، جواب‌های تقریبی گالرکین بر اساس یک ترکیب خطی از توابع ژاکوبی کسری در نظر گرفته می‌شوند و دستگاه جبری غیرخطی متناظر با آن با استفاده از دنباله‌ای از عملگرهای ماتریسی ساخته می‌شود. با توجه به هم‌ارزی میان معادله (۱) و دستگاه معادلات انتگرالی ولترای<sup>۲</sup> نوع دوم به صورت زیر عمل خواهیم کرد.

<sup>۱</sup> Fractional Jacobi Galerkin method

<sup>۲</sup> System of Volterra integral equations

با جایگذاری  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  در توابع ژاکوبی کسری [۱۷]، تقریب گالرکین ژاکوبی کسری  $z_{j,N}(t)$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$z_{j,N}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_{j,i} J_i^{\alpha,\beta,\tau}(t) = \underline{v}_j \underline{J} = \underline{v}_j \underline{J} \underline{T}_j, j \in \mathbb{S}_n, \quad (۲)$$

که در آن  $\underline{v}_j = [v_{j,0}, v_{j,1}, \dots, v_{j,N}, 0, \dots]$  و

$$\underline{J} = [J_0^{\alpha,\beta,\tau}(t), J_1^{\alpha,\beta,\tau}(t), \dots, J_N^{\alpha,\beta,\tau}(t), \dots]^T,$$

بردار توابع پایه‌ای ژاکوبی کسری از درجه  $\deg(J_i^{\alpha,\beta,\tau}(t)) = i\tau$  هستند. همچنین  $\underline{J}$  یک ماتریس پایین مثلثی نامنفرد از مرتبه بی‌نهایت است و  $\underline{T}_j = [1, t^\tau, t^{2\tau}, \dots, t^{N\tau}, \dots]^T$  فرض کنید

$$\underline{\psi}_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{j,i} t^{i\tau} = \underline{\psi}_j \underline{T}_j, \underline{\psi}_j = [\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,N}, 0, \dots]. \quad (۳)$$

علاوه بر این بر اساس تحلیلی بودن تابع سمت راست حول مبدأ می‌توان نوشت:

$$g_j(t, \mathbf{z}(t)) = \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} t^{\rho\tau} \left( \prod_{k=1}^n z_k^{\theta_k}(t) \right) = \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} t^{\rho\tau} \left( \prod_{k=1}^r z_k^{\theta_k}(t) \right),$$

(۴)

است، به طوری که  $\{l_1, l_2, \dots, l_r\} \subseteq \mathbb{S}_n$  و برای  $r \in \mathbb{S}_n$ ، داریم:  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r \neq 0$ . در واقع خط دوم رابطه (۴) با در نظر گرفتن  $z_k^{\theta_k} = 1$  به ازای  $\theta_k = 0$  به دست آمده است. روابط (۲) و (۳) را جایگذاری می‌کنیم و با استفاده از (۴) به دست می‌آوریم:



$$z_{j,N}(t) = \underline{\psi}_j T_t + \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} I^{\rho j} \left( t^{\rho \tau} \prod_{k=1}^r z_{l_k,N}^{\theta_k}(t) \right). \quad (5)$$

حال در پی این هستیم که یک نمایش ماتریسی برای طرف راست رابطه (۵) بیابیم. برای این منظور، ابتدا لم زیر را که در آن  $z_{l_k,N}^{\theta_k}(t), k=1,2,\dots,r$  را به یک فرم ماتریسی مناسب تبدیل می‌کند ارائه می‌دهیم.

لم ۱. رابطه زیر برقرار است:

$$z_{l_k,N}^{\theta_k}(t) = \underline{v}_k J M_{l_k}^{\theta_k-1} T_t, k=1,2,\dots,r,$$

که در آن  $M_{l_k}$  یک ماتریس بالا مثلثی از مرتبه بی‌نهایت به فرم زیر است:

$$M_{l_k} = \begin{bmatrix} \underline{v}_k J_0 & \underline{v}_k J_1 & \underline{v}_k J_2 & \dots \\ 0 & \underline{v}_k J_0 & \underline{v}_k J_1 & \dots \\ 0 & 0 & \underline{v}_k J_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

به طوری که  $J_s = \{J_{m,s}\}_{m=0}^{\infty}, s=0,1,\dots$

برهان. اثبات را با استقرا روی  $\theta_k$  انجام می‌دهیم. به وضوح برای  $\theta_k = 1$  حکم برقرار است. فرض می‌کنیم که حکم به ازای  $\theta_k$  برقرار باشد. برای  $\theta_k + 1$  داریم:

$$\begin{aligned} z_{l_k,N}^{\theta_k+1}(t) &= z_{l_k,N}^{\theta_k}(t) \times z_{l_k,N}(t) = (\underline{v}_k J M_{l_k}^{\theta_k-1} T_t) \times (\underline{v}_k J T_t) \\ &= \underline{v}_k J M_{l_k}^{\theta_k-1} (T_t \times (\underline{v}_k J T_t)). \quad (6) \end{aligned}$$

حال کافی است نشان دهیم

$$\underline{T}_t \times (\underline{v}_i J \underline{T}_t) = \underline{M}_i \underline{T}_t. \quad (۷)$$

برای این امر، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \underline{T}_t \times (\underline{v}_i J \underline{T}_t) &= \underline{T}_t \times \left( \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{l_k, i} J_{i, h} t^{h\tau} \right) = \left[ \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} v_{l_k, i} J_{i, h} t^{(h+m)\tau} \right]_{m=0}^{\infty} \\ &= \left[ \sum_{s=m}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^{\infty} v_{l_k, i} J_{i, s-m} t^{s\tau} \right) \right]_{m=0}^{\infty}, \quad (۸) \end{aligned}$$

که (۷) را نتیجه می‌دهد. در پایان جایگذاری (۷) در (۶)

برهان را کامل می‌کند.

حال می‌توانیم نمایش ماتریسی  $\prod_{k=1}^r z_{l_k, N}^{\theta_k}(t)$  را تشکیل دهیم. به همین جهت لم زیر را ارائه می‌دهیم.

لم ۲. رابطه زیر برقرار است:

$$\prod_{k=1}^r z_{l_k, N}^{\theta_k}(t) = \underline{v}_1 J \underline{M}_{l_1}^{\theta_1-1} \left( \prod_{k=2}^r \underline{M}_{\theta_k}^* \right) \underline{T}_t,$$

به طوری که ماتریس  $\{\underline{M}_{\theta_k}^*\}_{k=2}^r$  دارای ساختار بالا مثلثی زیر است:

$$M_{\theta_k}^* = \begin{bmatrix} \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_0 & \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_1 & \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_2 & \dots \\ 0 & \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_0 & \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_1 & \dots \\ 0 & 0 & \underline{v}_k (JM_{l_k}^{\theta_k-1})_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

که در آن  $(JM_{l_k}^{\theta_k-1})_s, s=0,1,\dots$  ستون  $s$  ام ماتریس  $JM_{l_k}^{\theta_k-1}$  را نشان می‌دهد.

**برهان.** اثبات را با استقرا روی  $r$  انجام می‌دهیم. با توجه به لم ۱ به ازای  $r=1$  به‌وضوح رابطه فوق برقرار است. فرض کنید که حکم به ازای  $r$  برقرار باشد. برای  $r+1$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{r+1} z_{l_k, N}^{\theta_k}(t) &= (\underline{v}_1 JM_{l_1}^{\theta_1-1} (\prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^*) \underline{T}_t) \times (\underline{v}_{r+1} JM_{l_{r+1}}^{\theta_{r+1}-1} \underline{T}_t) \\ &= \underline{v}_1 JM_{l_1}^{\theta_1-1} (\prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^*) (\underline{T}_t \times (\underline{v}_{r+1} JM_{l_{r+1}}^{\theta_{r+1}-1} \underline{T}_t)). \quad (9) \end{aligned}$$

با فرایندی مشابه با رابطه (۸)، به دست می‌آوریم:

$$\underline{T}_t \times (\underline{v}_{r+1} JM_{l_{r+1}}^{\theta_{r+1}-1} \underline{T}_t) = M_{\theta_{r+1}}^* \underline{T}_t, \quad (10)$$

نهایتاً با جایگذاری (۱۰) در (۹) اثبات کامل می‌شود.

اکنون لم‌های ۱ و ۲ را برای جمله دوم عبارت سمت راست (۵) به کار می‌بریم که نتیجه

می‌دهد:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} I^{\gamma_j} \left( t^{\rho\tau} \prod_{k=1}^r z_{l_k,N}^{\theta_k}(t) \right) \\ &= \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} I^{\gamma_j} \left( t^{\rho\tau} \nu_{l_1} J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) T_t \right) \\ &= \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \nu_{l_1} J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) \left( \sum_{\rho=0}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} \left[ I^{\gamma_j} t^{(\rho+m)\tau} \right]_{m=0}^{\infty} \right). \quad (11) \end{aligned}$$

به‌وضوح، داریم [۷]:

$$\left[ I^{\gamma_j} t^{(\rho+m)\tau} \right]_{m=0}^{\infty} = \left[ A_{j,\rho}^m t^{(\rho+m)\tau+\gamma_j} \right]_{m=0}^{\infty}, \quad j \in \mathfrak{N}_n,$$

که در آن  $A_{j,\rho}^m = \frac{\Gamma((\rho+m)\tau+1)}{\Gamma((\rho+m)\tau+\gamma_j+1)}$  در نتیجه، نامساوی (۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر

بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\rho=0 \\ \{\theta_k\}_{k=1}^n=0}}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} I^{\gamma_j} \left( t^{\rho\tau} \prod_{k=1}^r z_{l_k,N}^{\theta_k}(t) \right) \\ &= \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \nu_{l_1} J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) \left( \sum_{\rho=0}^{\infty} g_{j,\rho,\{\theta_k\}_{k=1}^n} \left[ A_{j,\rho}^m t^{(\rho+m)\tau+\gamma_j} \right]_{m=0}^{\infty} \right) \\ &= \left( \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \nu_{l_1} J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) Q_{j,\{\theta_k\}_{k=1}^n} \right) T_t, \quad j \in \mathfrak{N}_n, \quad (12) \end{aligned}$$

به‌طوری‌که  $Q_{j,\{\theta_k\}_{k=1}^n}$  یک ماتریس بالا مثلثی از مرتبه بی‌نهایت با درایه‌های زیر است:

$$[Q_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{\mu, \nu=0}^{\infty} = \begin{cases} 0, \mu \geq \nu - \gamma_j \lambda + 1, \\ g_{j, \nu - \mu - \gamma_j \lambda, \{\theta_k\}_{k=1}^n} A_{j, \nu - \mu - \gamma_j \lambda}^{\mu}, \mu < \nu - \gamma_j \lambda + 1. \end{cases}$$

حال (۲) و (۱۲) را در (۵) جایگذاری می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$\underline{v}_j J \underline{T}_t = \underline{\psi}_j \underline{T}_t + \left( \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \underline{v}_l J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) Q_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n} \right) \underline{T}_t,$$

که قابل بازنویسی به صورت

$$\underline{v}_j J = \left( \underline{\psi}_j + \left( \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \underline{v}_l J M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1} \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^* \right) Q_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n} \right) \right) J^{-1} J. \quad (۱۳)$$

است.

با اعمال تصویر متعامد (۱۳) در فضای  $\langle J_0^{\alpha, \beta, \tau}(t), J_1^{\alpha, \beta, \tau}(t), \dots, J_N^{\alpha, \beta, \tau}(t) \rangle$  نتیجه می‌گیریم:

$$\underline{v}_j^N = \left( \underline{\psi}_j^N + \left( \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \underline{v}_l^N J^N (M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1})^N \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^{*N} \right) Q_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n}^N \right) \right) (J^N)^{-1}, \quad (۱۴)$$

به طوری که نماد  $N$  در بالای ماتریس‌ها و بردارها به ترتیب نمایش دهنده زیر ماتریس اصلی و زیربردار از مرتبه  $N+1$  است. بردارهای مجهول با حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی (۱۴) از مرتبه  $n(N+1)$  به دست می‌آیند.

حل‌پذیری دستگاه جبری به دست آمده از پیاده‌سازی روش عملگری گالرکین ژاکوبی کسری

می‌دانیم که حل دستگاه جبری غیرخطی (۱۴) به طور مستقیم به ویژه برای مقادیر بزرگ  $n$  و  $N$  نیازمند حجم محاسبات بالایی است که منجر به از دست رفتن دقت می‌شود. در این بخش

به‌منظور جلوگیری از این امر، پیاده‌سازی را به‌گونه‌ای پیش می‌بریم که مجهولات دستگاه (۱۴) با استفاده از فرمول‌های بازگشتی محاسبه شوند و نیاز به حل هیچ‌گونه دستگاه جبری غیرخطی نباشد. بدین منظور، با ضرب طرفین رابطه (۱۴) در  $J^N$  و تعریف

$$\underline{v}_j = \underline{v}_j^N J^N = [\underline{v}_{j,0}, \underline{v}_{j,1}, \dots, \underline{v}_{j,N}], \quad j \in \mathbb{N}_n, \quad (15)$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\underline{v}_j = \underline{v}_j^N + \left( \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n}^{\infty} \underline{v}_{j_1} (M_{l_1}^{\theta_{l_1}-1})^N \left( \prod_{k=2}^r M_{\theta_k}^{*N} \right) Q_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n}^N \right). \quad (16)$$

طبق لم ۱ می‌توانیم بنویسیم:

$$M_{l_k} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{l_k} J_0 & \underline{v}_{l_k} J_1 & \underline{v}_{l_k} J_2 & \dots \\ 0 & \underline{v}_{l_k} J_0 & \underline{v}_{l_k} J_1 & \dots \\ 0 & 0 & \underline{v}_{l_k} J_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_{l_k,0} & \underline{v}_{l_k,1} & \underline{v}_{l_k,2} & \dots \\ 0 & \underline{v}_{l_k,0} & \underline{v}_{l_k,1} & \dots \\ 0 & 0 & \underline{v}_{l_k,0} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

طبق مرجع [۸] می‌توان دریافت که ماتریس  $\{(M_{l_k}^{\theta_{l_k}-1})^N\}_{k=1}^r$  دارای ساختار توپلیتز<sup>۱</sup> بالا مثلثی به‌صورت زیر است:

$$(M_{l_k}^{\theta_{l_k}-1})^N = \begin{bmatrix} (\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-1} & (\theta_{l_k}-1)(\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-2} \underline{v}_{l_k,1} & \frac{1}{2}(\theta_{l_k}-1)(\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-3} \left( (\theta_{l_k}-2)(\underline{v}_{l_k,1})^2 + 2\underline{v}_{l_k,0}\underline{v}_{l_k,2} \right) & \dots & \dots \\ 0 & (\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-1} & (\theta_{l_k}-1)(\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-2} \underline{v}_{l_k,1} & \dots & \dots \\ 0 & 0 & (\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & (\underline{v}_{l_k,0})^{\theta_{l_k}-1} \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup> Toeplitz

$$= \begin{bmatrix} M_{l_k,0,0}^{\theta_k-1} & M_{l_k,0,1}^{\theta_k-1} & \dots & M_{l_k,0,N}^{\theta_k-1} \\ 0 & M_{l_k,0,0}^{\theta_k-1} & \dots & M_{l_k,0,N-1}^{\theta_k-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{l_k,0,0}^{\theta_k-1} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

که در آن  $\{M_{l_k,0,s}^{\theta_k-1}\}_{s=0}^N$  توابعی غیرخطی بر حسب  $\underline{v}_{l_k,0}, \underline{v}_{l_k,1}, \dots, \underline{v}_{l_k,s}$  هستند.

علاوه بر این با در نظر گرفتن روابط (۱۵) و (۱۷) می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس‌های  $\{M_{\theta_k}^{*N}\}_{k=2}^r$  قابل بازنویسی به فرم توپلیتز بالا مثلثی زیر هستند:

$$M_{\theta_k}^{*N} = \begin{bmatrix} M_{\theta_k,0,0}^* & M_{\theta_k,0,1}^* & \dots & M_{\theta_k,0,N}^* \\ 0 & M_{\theta_k,0,0}^* & \dots & M_{\theta_k,0,N-1}^* \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M_{\theta_k,0,0}^* \end{bmatrix},$$

به طوری که

$$M_{\theta_k,0,s}^* = \sum_{i=0}^s \underline{v}_{l_k,i} M_{l_k,0,s-i}^{\theta_k-1}, \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

توابعی غیرخطی بر حسب  $\underline{v}_{l_k,0}, \underline{v}_{l_k,1}, \dots, \underline{v}_{l_k,s}$  می‌باشند.

در نتیجه، ماتریس  $\Omega^{\{l_k\}_{k=1}^r}$  تعریف شده به صورت

$$\Omega_{0,s}^{(I_k)_{k=1}^r} = \left( M_{I_1}^{\theta_1^{-1}} \right)^N M_{\theta_2}^{*N} \dots M_{\theta_r}^{*N} = \begin{bmatrix} \Omega_{0,0}^{(I_k)_{k=1}^r} & \Omega_{0,1}^{(I_k)_{k=1}^r} & \dots & \Omega_{0,N}^{(I_k)_{k=1}^r} \\ 0 & \Omega_{0,0}^{(I_k)_{k=1}^r} & \dots & \Omega_{0,N-1}^{(I_k)_{k=1}^r} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_{0,0}^{(I_k)_{k=1}^r} \end{bmatrix},$$

دارای ساختار توپلیتز بالا مثلثی است، به طوری که  $\{\Omega_{0,s}^{(I_k)_{k=1}^r}\}_{s=0}^N$

$$\underline{V}_{1,0}, \underline{V}_{2,0}, \dots, \underline{V}_{r,0},$$

$$\underline{V}_{1,1}, \underline{V}_{2,1}, \dots, \underline{V}_{r,1},$$

⋮

$$\underline{V}_{1,s}, \underline{V}_{2,s}, \dots, \underline{V}_{r,s},$$

هستند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\Omega_{0,s}^{(I_k)_{k=1}^r} = \sum_{i_1=0}^s \sum_{i_2=0}^{i_1} \dots \sum_{i_{r-1}=0}^{i_{r-2}} M_{I_1,0,s-i_1}^{\theta_1^{-1}} M_{\theta_2,0,i_1-i_2}^* \dots M_{\theta_r,0,i_{r-1}}^*.$$

در پایان با تعریف  $\Lambda_j^{(\theta_k)_{k=1}^n} = \Omega_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n}^N$ ,  $j \in \mathbb{N}_n$  می‌توان به دست آورد:

$$\left[ \Lambda_j^{(\theta_k)_{k=1}^n} \right]_{\mu, \nu=0}^N = \begin{cases} 0, & \mu \geq \nu - \gamma_j \lambda + 1, \\ \sum_{s=0}^{\nu - \mu - \gamma_j \lambda} \Omega_{0,s}^{(I_k)_{k=1}^n} \left[ \mathcal{Q}_{j, \{\theta_k\}_{k=1}^n}^N \right]_{\mu+s, \nu}, & \mu < \nu - \gamma_j \lambda + 1. \end{cases}$$

سپس با توجه به ساختار ماتریس بالا مثلثی  $\Lambda_j^{(\theta_k)_{k=1}^n}$  داریم:



$$\underline{v}_1 \Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n} = \underline{v}_1 \begin{bmatrix} \gamma_j \lambda & & & & \\ 0 \dots 0 & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{0, \gamma_j \lambda} & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{0, \gamma_j \lambda + 1} & \dots & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{0, N} \\ \vdots & 0 & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{1, \gamma_j \lambda + 1} & \dots & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{1, N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{N - \gamma_j \lambda, N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

حال با در نظر گرفتن رابطه بالا، به ازای  $j \in \mathbb{N}_n$  می توان نوشت:

$$[\underline{v}_1 \Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{\beta=0}^N = \begin{cases} 0, & \beta < \gamma_j \lambda, \\ \sum_{\alpha=0}^{\beta - \gamma_j \lambda} \underline{v}_{1, \alpha} [\Lambda_j^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}]_{\alpha, \beta}, & \beta \geq \gamma_j \lambda, \end{cases}$$

$$= [0 \dots 0, \mathbf{G}_{\gamma_j \lambda}^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}, \mathbf{G}_{\gamma_j \lambda + 1}^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}, \dots, \mathbf{G}_N^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}], \quad (18)$$

که در آن  $\{\mathbf{G}_{\gamma_j \lambda + s}^{\{\theta_k\}_{k=1}^n}\}_{s=0}^{N - \gamma_j \lambda}$  توابعی غیرخطی برحسب

$$\underline{v}_{1,0}, \underline{v}_{2,0}, \dots, \underline{v}_{r,0},$$

$$\underline{v}_{1,1}, \underline{v}_{2,1}, \dots, \underline{v}_{r,1},$$

⋮

$$\underline{v}_{1,s}, \underline{v}_{2,s}, \dots, \underline{v}_{r,s}.$$

می باشند.

پس از جایگذاری (۱۸) در (۱۶)، مؤلفه‌های مجهول بردارهای مجهول  $\{\underline{v}_j\}_{j=1}^n$  توسط روابط بازگشتی

$$\begin{cases} \underline{v}_{j,0} = \psi_{j,0}, \\ \vdots \\ \underline{v}_{j,\gamma_j\lambda-1} = \psi_{j,\gamma_j\lambda-1}, \\ \underline{v}_{j,\gamma_j\lambda} = \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \mathbf{G}_{\gamma_j\lambda}^{\{\theta_k\}_{k=1}^n} + \psi_{j,\gamma_j\lambda}, \\ \vdots \\ \underline{v}_{j,N} = \sum_{\{\theta_k\}_{k=1}^n=0}^{\infty} \mathbf{G}_N^{\{\theta_k\}_{k=1}^n} + \psi_{j,N}, \quad j \in \mathbb{N}_n, \end{cases}$$

محاسبه می‌شوند.

در پایان، بردارهای مجهول  $\{\underline{v}_j^N\}_{j=1}^n$  با حل دستگاه پایین مثلثی (۱۵) حاصل می‌شوند و در نتیجه آن جواب‌های گالرکین ژاکوبی کسری (۲) به دست می‌آیند.

### تجزیه و تحلیل:

در این بخش برای تأیید دقت و کارایی روش معرفی شده، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی دو مدل بیماری رو ارائه داده و به تجزیه و تحلیل نتایج راهبردی می‌پردازیم. موارد زیر در این بخش مورد بررسی قرار گرفته‌اند:

- برخی ویژگی‌های عددی مهم از جمله خطاهای عددی  $(\mathbf{E}(N))$  و مدت‌زمان لازم برای اجرای برنامه به‌منظور بررسی عملکرد محاسباتی الگوریتم معرفی شده گزارش شده‌اند. کاربرد روش در پیشگیری از بیماری‌های واگیردار شرح داده شده‌اند.

در تمام مثال‌ها خطاهای عددی در نرم  $L_{W^{\alpha,\beta,\tau}}^2(\Lambda)$  توسط رابطه

$$\mathbf{E}(N) = \max_{j \in \mathbb{N}_n} \|e_{j,N}\|_{W^{\alpha,\beta,\tau}},$$

محاسبه شده‌اند و در حالتی که جواب‌های دقیق مشخص نباشند، خطاهای عددی توسط رابطه زیر تخمین زده می‌شوند:

$$\mathbf{E}(N) = \max_{j \in \mathbb{N}_n} \|z_{j,2N}(t) - z_{j,N}(t)\|_{W^{\alpha,\beta,\tau}}.$$

مثال ۱. (کوهید ۱۹[۱۴]) مدل غیرخطی بیماری کوهید ۱۹ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_c^\gamma S(t) = \bar{a} - \bar{K}I(t)S(t)(1 + \hat{\alpha}I(t)) - \bar{d}_0S(t), \\ D_c^\gamma E(t) = \bar{K}I(t)S(t)(1 + \hat{\alpha}I(t)) - (\bar{d}_0 + \bar{\kappa})E(t), \\ D_c^\gamma I(t) = \bar{b} + \hat{\alpha}E(t) - (\bar{\beta} + \bar{d}_0 + \bar{\delta})I(t), \\ D_c^\gamma R(t) = \bar{\delta}I(t) - \bar{d}_0R(t), \\ S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0, \quad \gamma \in (0,1], \quad T = 15, \end{cases} \quad (19)$$

که در آن  $\bar{K} = \frac{R_0 \bar{d}_0 (\bar{d}_0 + \bar{\kappa}) (\bar{\beta} + \bar{d}_0 + \bar{\delta})}{\hat{\alpha} \bar{a}}$ . این مدل شامل چهار مجهول جمعیت سالم

$S(t)$ ، جمعیت آلوده  $I(t)$ ، جمعیت بهبودیافته  $R(t)$  و جمعیت در معرض ابتلا  $E(t)$  در

زمان  $t$  هست. شرح پارامترهای مسئله را در مرجع [۱۴] و مقادیر آنها را در جدول ۱ می‌توان یافت.

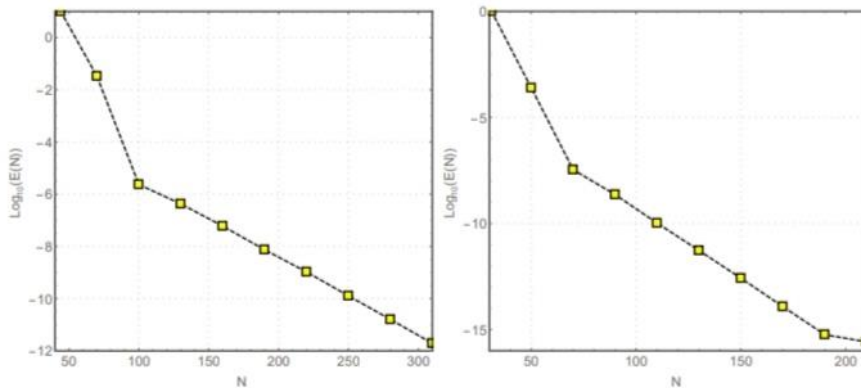
$\hat{\alpha}$	$\bar{\kappa}$	$\bar{\beta}$	$\bar{b}$	$\bar{d}_0$	$\bar{\delta}$	$\bar{a}$	پارامتر
0.000009	0.000024	0.0109	0.006656	0.0000004	0.00250281	0.75	مقدار [۱۴]

جدول ۱: مقادیر پارامترهای مدل (۱۹).

با به‌کارگیری روش عددی ارائه‌شده، مسئله فوق را با قرار دادن مقادیر  $S(0) = 0.323$ ،  $E(0) = 0.21$ ،  $I(0) = 0.22$  و  $R(0) = 0.21$  حل می‌کنیم. نتایج عددی در جدول ۲ و شکل ۱ گزارش شده‌اند. با توجه به نتایج ارائه‌شده با افزایش درجه تقریب  $N$  شاهد کاهش خطا هستیم. به‌علاوه کاهش منظم خطا به‌ویژه به ازای درجات تقریب بزرگ  $N$  در مدت‌زمان اجرای بسیار کم حاکی از خوش‌وضع و دقت بالای روش عددی معرفی‌شده در تقریب جواب‌های این مسئله است.

$\gamma = \frac{1}{2}$				
$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$			$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$	
$N$	$\mathbf{E}(N)$	$CPU - time$	$\mathbf{E}(N)$	$CPU - time$
40	$4.01 \times 10^{-6}$	2.27	$1.61 \times 10^{-5}$	2.23
80	$8.95 \times 10^{-9}$	25.53	$3.06 \times 10^{-8}$	25.72
160	$5.57 \times 10^{-14}$	312.39	$1.61 \times 10^{-13}$	313.95
$\gamma = \frac{2}{3}$				
70	$2.72 \times 10^{-5}$	14.63	$1.05 \times 10^{-4}$	15.56
140	$2.37 \times 10^{-7}$	167.20	$7.80 \times 10^{-7}$	167.27
280	$1.59 \times 10^{-11}$	3319.73	$4.41 \times 10^{-11}$	3296.53

جدول ۲: نتایج عددی به دست آمده برای مثال ۱ به ازای  $\alpha, \beta, \gamma$  و  $N$  های متفاوت.



شکل ۲: نمودار لگاریتم خطا های عددی به ازای  $N$  های متفاوت  $\gamma = \frac{1}{2}$  (چپ)،  $\gamma = \frac{2}{3}$  (راست) و

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \text{ برای مثال ۱.}$$

روش‌های شبیه‌سازی پیشین بدترین سناریوهای قابل قبول را برای کمک به برنامه‌ریزی بهداشت عمومی ایجاد می‌کند و نهایتاً نتایج نامطمئن در زمینه کنترل بیماری‌ها به دست می‌دادند. علی‌رغم مشکلات روش‌های شبیه‌سازی پیشین، روش پیشنهادی فوق به ما اجازه می‌دهد تا پارامترهای پیشگیری و درمان را با دقت بسیار بالایی مورد بررسی قرار داده و ما را قادر می‌سازد که مدل‌ها، با سطوح مختلف پیچیدگی و ابعاد بسیار بالا را مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۲. (هیپاتیت ب<sup>۱</sup>) مدل کسری بیماری هیپاتیت ب به همراه دارودرمانی به صورت

دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی

<sup>1</sup> Hepatitis B

$$\begin{cases} \frac{1}{\bar{\tau}^{1-\gamma}} D_C^\gamma T(t) = \bar{s} - \bar{d}T(t) - (1-\bar{\eta})\bar{\alpha}V(t)T(t) + \bar{\rho}I(t), \\ \frac{1}{\bar{\tau}^{1-\gamma}} D_C^\gamma I(t) = (1-\bar{\eta})\bar{\alpha}V(t)T(t) - \bar{\delta}'I(t) - \bar{\rho}I(t), \\ \frac{1}{\bar{\tau}^{1-\gamma}} D_C^\gamma V(t) = (1-\bar{\delta})\bar{\rho}I(t) - \bar{c}V(t), \\ T(0) = T_0, \quad I(0) = I_0, \quad V(0) = V_0, \quad \gamma \in (0,1], \quad t \in \Lambda, \end{cases} \quad (20)$$

با در نظر گرفتن مجهولات سلول‌های هدف  $T(t)$ ، سلول‌های آلوده  $I(t)$  و ویروس آزاد  $V(t)$  در زمان  $t$ ، قابل نوشتن است. در مرجع [۴] می‌توان توصیف پارامترهای مسئله را مطالعه کرد و مقادیر آنها نیز در جدول ۳ داده شده‌اند.

$\bar{s}$ $\bar{d}$ $\bar{\alpha}$ $\bar{\rho}$ $\bar{\delta}'$ $\bar{p}$ $\bar{c}$ $\bar{\eta}$ $\bar{\delta}$ $\bar{\tau}$
مقدار [۴] 10 0.5 0.00122 0.1 0.3 0.8 0.7 0.01 0.41 0.02

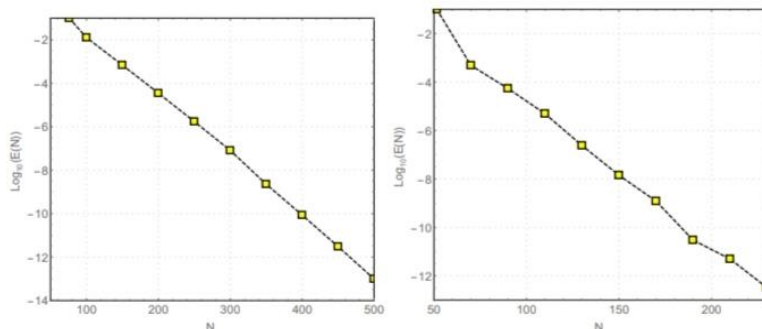
جدول ۳: مقادیر پارامترهای مدل (۲۰).

حال روش خود را برای مثال ۲ به‌عنوان یک مسئله کاربردی بکار می‌بریم. قرار می‌دهیم:  $T_0 = 14, I_0 = 13, V_0 = 10$  و  $\gamma = \frac{7}{10}$  و مسئله فوق را با استفاده از روش پیشنهادی حل می‌کنیم. جدول ۴ و شکل ۲ نتایج به‌دست‌آمده را نشان می‌دهند. با توجه به عدم وجود نوسان در خطاهای عددی به‌ویژه برای دامنه‌های بزرگ  $\Lambda$ ، دقت بسیار بالا و خوش‌وضع روش ارائه‌شده در حل مسائل کاربردی غیرقابل‌انکار است. به‌وضوح کاهش منظم خطا به‌ویژه به ازای درجات تقریب بزرگ در مدت‌زمان اجرای بسیار کم برای یک مسئله غیرخطی پیچیده از ویژگی‌های بارز روش ارائه‌شده است که کمتر رویکرد عددی در مقالات پیشین از آن برخوردار است.

		$T = 10$			
		$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$		$\alpha = 0, \beta = \frac{1}{2}$	
$N$	$\mathbf{E}(N)$	$CPU - time$	$\mathbf{E}(N)$	$CPU - time$	
60	$3.20 \times 10^{-3}$	1.86	$1.67 \times 10^{-2}$	1.73	
120	$8.47 \times 10^{-7}$	8.79	$3.81 \times 10^{-6}$	8.95	
240	$5.91 \times 10^{-14}$	46.73	$2.28 \times 10^{-13}$	46.75	
		$T = 20$			
120	$6.46 \times 10^{-3}$	8.91	$2.91 \times 10^{-2}$	9.07	
240	$1.55 \times 10^{-6}$	46.98	$6.00 \times 10^{-6}$	46.73	
480	$5.43 \times 10^{-13}$	728.53	$1.78 \times 10^{-12}$	736.48	

جدول ۴: نتایج عددی به دست آمده برای مثال ۲ به ازای  $\alpha, \beta, \Lambda$  و  $N$  های متفاوت.





شکل ۱: نمودار لگاریتم خطاهای عددی به ازای  $N$  های متفاوت،  $T=10$  (چپ)،  $T=20$  (راست) و

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2} \text{ برای مثال ۲.}$$

در جوامع بشری، روند تکامل و کنترل اپیدمی همراه است با حافظه تجربه یا دانش مردم در مورد گسترش بیماری در گذشته. اگر مردم از گذشته آگاه باشند از یک بیماری خاص در محیط خود، ممکن است از اقدامات احتیاطی متفاوتی استفاده کنند اقداماتی مانند واکسیناسیون. از سوی دیگر، مشتقات کسری نقش مهمی در توصیف اثرات حافظه در سیستم‌های پویا دارند. با محدود کردن مرتبه مشتق به ۱، اثرات حافظه کاهش می‌یابد. وقتی مرتبه مشتق از ۱ کاهش می‌یابد، اثر حافظه سیستم افزایش می‌یابد و بنابراین عفونت به‌کندی رشد می‌کند و تعداد افراد آلوده در مرحله بدون علائم، برای مدت طولانی افزایش می‌یابد. که به‌وضوح در این مثال به چشم می‌خورد. از سوی دیگر، تجربه یا دانش افراد در مورد بیماری‌های گذشته به بیماران مبتلا به هیپاتیت کمک می‌کند تا از اعمال پیشگیری‌کننده برای به تأخیر انداختن شروع علائم استفاده کنند. از طرفی مرحله بدون علائم برای مدت طولانی منجر به افزایش جمعیت مبتلا می‌شود. لذا از بحث فوق و نتایج عددی، نتیجه می‌گیریم که مرتبه مشتق کمتر از ۱ می‌تواند نقش استفاده از درمان را در مدل ایفا کند. شایان‌ذکر است نتایجی که منجر به کنترل بیماری

می‌شود با روش‌های معرفی‌شده پیشین قابل استنتاج نمی‌باشند. در واقع روش معرفی‌شده در این مقاله ابزاری قدرتمند را در اختیار می‌دهد تا بتوانیم با تحلیل مدل‌های مرتبه کسری بیماری‌های واگیردار به نتایج بسیار مهم و راهبردی در این مورد دست‌یابیم.

## نتیجه‌گیری و پیشنهاد:

### نتیجه‌گیری:

با گذر زمان، پس از کشف اهمیت تحقیق در زمینه بیماری‌های واگیردار توسط ریاضیدانان، تلاش بر این بوده که مدل‌های جامع‌تر و کامل‌تری از بیماری‌های واگیردار را ارائه دهند. تعریف کنترلر بیشتر در مدل، به معنی افزایش بعد دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری هست و بدون ارائه یک روش عددی توانا قادر به حل همچنین دستگاه غیرخطی نیستیم. دلیل روشن عدم ارائه یک مدل جامع و بدون محدودیت در زمینه تعریف کنترلر همین عدم تئوری قدرتمند در زمینه این دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری است. با توجه عدم توانایی مشتقات مرتبه صحیح در مدل‌سازی پدیده‌هایی که دارای خواص موروثی و حافظه‌ای می‌باشند، یک مدل مرتبه کسری جامع از دینامیک انتقال بیماری‌های واگیردار ارائه شد. تا زمانی که ابزار قدرتمند نداشته باشیم، نتایج مطلوب هم نخواهیم داشت، برای این منظور یک روش سریع و قدرتمند و همچنین نهایتاً نتایج مفید و قابل استناد در زمینه پیشگیری از بیماری‌های واگیردار را با ارائه دو مدل واقعی به دست آوردیم. این تحقیق شامل نتایج نظری و کاربردی بود. و همچنین وجود جواب و رفتار جواب‌های مدل فوق‌موردبررسی قرار گرفت. در واقع در این تحقیق با ارائه روش پیشنهادی به دنبال عدم انتشار ویروس و کاهش تعداد ویروس‌های آزاد و افزایش تعداد سلول‌های سالم و نهایتاً افزایش طول عمر و کیفیت زندگی افراد مبتلا به ویروس هستیم.

## پیشنهاد:

به‌عنوان پیشنهاد، می‌توان با اضافه کردن کنترلرهای گوناگون در ارتباط با پیشگیری، در مان و اثر دارویی به دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری، مدل‌های جدیدی به دست آورد، چراکه با وجود روش سریع و دقیق فوق، دیگر محدودیتی در زمینه تجزیه و تحلیل مدل‌های بیماری‌های واگیردار نخواهیم داشت.

**منابع:**

- [1] Almeida, R., Brito da Cruz, A., Martins, N., & Monteiro, M. T. T. (2019). An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative. *International journal of dynamics and control*, 7(2), 776-784.
- [2] Baba, I. A., & Nasidi, B. A. (2021). Fractional order epidemic model for the dynamics of novel COVID-19. *Alexandria Engineering Journal*, 60(1), 537-548.
- [3] Buratto, A., Cesaretto, R., & Zamarchi, R. (2020). Mathematical models for HIV treatment: A schematic review. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 23(3), 707-725.
- [4] Cardoso, L. C., Dos Santos, F. L. P., & Camargo, R. F. (2018). Analysis of fractional-order models for hepatitis B. *Computational and Applied Mathematics*, 37(4), 4570-4586.
- [5] Chang, H. (2021). A mathematical study on the drug resistant virus emergence with HIV/AIDS treatment cases. *Heliyon*, 7(1), e05883.
- [6] Chen, Y., Liu, F., Yu, Q., & Li, T. (2021). Review of fractional epidemic models. *Applied mathematical modelling*, 97, 281-307.
- [7] Diethelm, K., & Ford, N. J. (2002). Analysis of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(2), 229-248.
- [8] Ghoreishi, F., & Hadizadeh, M. (2009). Numerical computation of the Tau approximation for the Volterra-Hammerstein integral equations. *Numerical Algorithms*, 52(4), 541-559.
- [9] Kozioł, K., Stanisławski, R., & Bialic, G. (2020). Fractional-order sir epidemic model for transmission prediction of covid-19 disease. *Applied Sciences*, 10(23), 8316.
- [10] Mandal, M., Jana, S., Nandi, S. K., & Kar, T. K. (2020). Modelling and control of a fractional-order epidemic model with fear effect. *Energy, Ecology and Environment*, 5(6), 421-432.

[11] Omondi, E. O., Mbogo, R. W., & Luboobi, L. S. (2019). A mathematical modelling study of HIV infection in two heterosexual age groups in Kenya. *Infectious Disease Modelling*, 4, 83-98.

[12] Pan, W., Li, T., & Ali, S. (2021). A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of Ebola. *Advances in Difference Equations*, 2021(1), 1-21.

[13] Raslan, W. E. (2021). Fractional mathematical modeling for epidemic prediction of COVID-19 in Egypt. *Ain Shams Engineering Journal*, 12(3), 3057-3062.

[14] ur Rahman, M., Arfan, M., Shah, K., & Gómez-Aguilar, J. F. (2020). Investigating a nonlinear dynamical model of COVID-19 disease under fuzzy caputo, random and ABC fractional order derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 110232.

[15] Tamilalagan, P., Karthiga, S., & Manivannan, P. (2021). Dynamics of fractional order HIV infection model with antibody and cytotoxic T-lymphocyte immune responses. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 382, 113064.

[16] Ullah, A., Abdeljawad, T., Ahmad, S., & Shah, K. (2020). Study of a fractional-order epidemic model of childhood diseases. *Journal of Function Spaces*, 2020.

[17] Zaky, M. A., Doha, E. H., & Machado, J. T. (2018). A spectral framework for fractional variational problems based on fractional Jacobi functions. *Applied Numerical Mathematics*, 132, 51-72.

[۱۸] هادیان، حسین، مطهری، سید ابوالفضل، خسروی، محمدرضا (تابستان ۱۴۰۱)، بررسی، تحلیل و پیش‌بینی دادگان فائوستات به‌منظور استخراج اطلاعات مفید برای مدیریت راهبردی در بخش کشاورزی، فصلنامه آآمد و فناوری دفاعی، سال پنجم، شماره چهاردهم.

[۱۹] صنعت‌کار، سید امیر، اولیایی، شهرام (زمستان ۱۴۰۰)، اکسیژن هایپربار، فراتر از یک درمان برای کاهش شدت و دوران آسیب‌دیدگی‌های شایع نیروهای نظامی در طب دفاعی (مطالعه مروری)، فصلنامه آماد و فناوری دفاعی، سال چهارم، شماره دوازدهم.